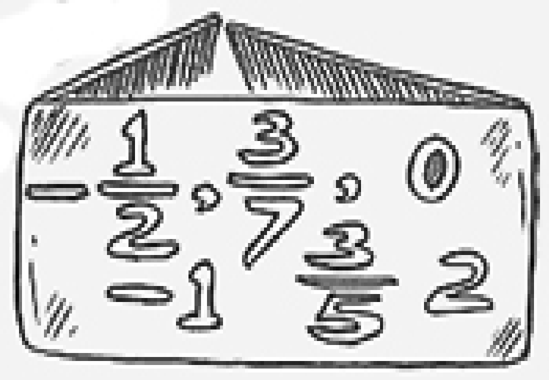
परिमेयसङ्ख्याः

अध्यायः 9

9.1 भूमिका



भवद्भिः सङ्ख्यानाम् अध्ययनं स्वीयपरिवेशस्य वस्तूनां गणनात् प्रारब्धम्। अस्मिन् कार्ये प्रयुक्ताः सङ्ख्याः गणनसङ्ख्याः (countingnumbers) अथवा प्राकृतसङ्ख्याः (natural numbers) इति कथिताः। 1, 2,3,4, --- इति एताः प्राकृतसंख्याः सन्ति। प्राकृतसङ्ख्यासु शून्ये (0) सम्मेलिते सति अस्माभिः 0,1,2,3,--- इति पूर्णसङ्ख्याः (whole numbers) प्राप्ताः। तत्पश्चात् पूर्णाङ्कम् (integers) प्राप्तुं पूर्णसङ्ख्यासु प्राकृत-सङ्ख्यानाम् ऋणात्मकाः (negatives) सम्मेलिताः - 3,-2,-1, 0,-1,-2,- 3 --- इत्येते पूर्णाङ्काः सन्ति। अनेन प्रकारेण वयं सङ्ख्यापद्धतेः (number system) प्राकृतसङ्ख्यातः पूर्णसङ्ख्यापर्यन्तं पूर्णसङ्ख्यातः च पूर्णाङ्कपर्यन्तं विस्तारं कृतवन्तः।

भवतां परिचयः भिन्नैः सह अपि कारितः। इमाः $\frac{\text{अंशः}}{\text{हरः}}\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$ इति प्रकारकाः संख्याः भवन्ति यत्र अंशः शून्यम् अथवा एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति तथा च हरः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति। भवन्तः द्वयोः भिन्नयोः तुलनां कृतवन्तः। तयोः समतुल्यानि भिन्नानि अपि ज्ञातानि तानि आधारीकृत्य च योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् एवं च विभाजनम् इति चतसृणाम् आधारभूत-संक्रियाणाम् अध्ययनं कृतम्।

अस्मिन् अध्याये वयं संङ्ख्यापद्धतेः इतोऽपि विस्तारं करिष्यामः। वयं परिमेयसङ्ख्यानां (rational numbers) परिचयं दत्त्वा ताः आधारीकृत्य योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् अथ च विभाजनम् इति सङ्क्रियाणाम् अध्ययनं करिष्यामः।

9.2 परिमेयसङ्ख्यानाम् आवश्यकता

वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः यत् केन प्रकारेण सङ्ख्याभिः सम्बद्धाः विपरीत-स्थितीः अभिव्यक्तीकर्तुं पूर्णाङ्कानां प्रयोगः कर्तुं शक्यते। उदाहरणार्थं यदि कस्यचित् स्थानस्य दक्षिणभागीयः 3 किलोमीटरमितः अन्तरालः 3 इति अङ्कद्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा तस्मात् एव स्थानात् वामभागीयः 5 किलोमीटरमितः अन्तरालः -5 इत्यनेन व्यक्तीकर्तुं शक्यते।

यदि150 रूप्यकाणां लाभः 150 द्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा 100 रूप्यकाणां हानिः –100 इत्यनेन व्यक्तीकर्तुं शक्यते।

एवम्भूताः अनेकाः स्थितयः भवन्ति याभिः भिन्नात्मक-सङ्ख्याः (भिन्नानि) सम्बद्धाः भवन्ति। किं वयं समुद्रतलात् उपरितनं 750 मीटरमितम् औन्नत्यं $\frac{3}{4}$ किलोमीटरद्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? किं वयं समुद्रतलात् अधस्तनीं 750 मीटरमितां गहनतां किलोमीटरद्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? किं वयं समुद्रतलस्य अधतनीं $\frac{3}{4}$ किलोमीटरमितां गहनतां $\frac{3}{4}$ द्वारा व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ? वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् $\frac{3}{4}$ इति नैव तु एकः पूर्णाङ्कः अस्ति नैव च एकं भिन्नम् अस्ति। एतादृशीः संख्याः सम्मेलयितुम् एतद् आवश्यकम् अस्ति यद् वयं सङ्ख्यापद्धतेः विस्तारं करवाम।

9.3 परिमेय-सङ्ख्या नाम किम् अस्ति ?

'परिमेय' (rational) इति शब्दः 'अनुपात' (ratio) इत्यस्मात् पदात् उत्पन्नः। 3:2 इत्येतद् $\frac{3}{2}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते। अत्र 3 तथा च 2 इति प्राकृतसङ्ख्ये स्तः।

अनेन एव प्रकारेण p तथा च q इति द्वयोः पूर्णाङ्कयोः ($q \neq 0$) p :q इति अनुपातः $\frac{p}{q}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते। एतत् तत् एव रूपम् अस्ति यस्मिन् परिमेयसङ्ख्याः व्यक्तीक्रियन्ते।

एका परिमेयसंख्या एतादृश्याः संख्यायाः रूपेण परिभाष्यते या $\frac{p}{q}$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्येत, यत्र p तथा च q इति पूर्णाङ्कौ स्तः तथा च $q \neq 0$ इति वर्तते।

अनेन प्रकारेण $\frac{4}{5}$ एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति। यत्र $p = 4$ एवञ्च $q= 5$ इति अस्ति।

किम् $\frac{-3}{4}$ अपि एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ? आम्, यतोहि $p = -3$ तथा च $q= 4$ पूर्णाङ्कः अस्ति।

भवद्भिः $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $1\frac{2}{3}$ इत्यादीनि अनेकानि भिन्नानि दृष्टानि। सर्वाणि भिन्नानि एव परिमेयसङ्ख्याः भवन्ति। किं भवन्तः अस्य कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति ? 0.5, 2.3,0.333 इत्यादि-दशमानसङ्ख्यानां विषये किं कथयितुं शक्यते ? एवंविधा प्रत्येकं सङ्ख्या एकसामान्य-भिन्नरूपेण लेखितुं शक्यते अतश्च इमाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति। उदाहरणार्थम्, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

अंशः हरः च

$\frac{p}{q}$ इत्यत्र पूर्णाङ्कः p अंशः अस्ति पूर्णाङ्कः च $q (q \neq 0)$ हरः अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. 1. किं 2/(-3) इति एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु।
2. दशपरिमेयसङ्ख्यानाम् एकां सूचीं निर्मान्तु।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-3}{7}$ इत्यत्र -3 इति अंशः अस्ति अथ च 7 इति हरः अस्ति।

एतादृशीः पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु, यासु एकैकस्याः

(a) अंशः एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः स्यात् हरः च एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत्।

(b) अंशः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः स्यात् हरः च एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत्।

(c) अंशः हरः च उभौ अपि ऋणात्मकौ पूर्णाङ्कौ भवेताम्।

(d) अंशः हरः च उभौ अपि धनात्मकौ पूर्णाङ्कौ भवेताम्।

- किं पूर्णाङ्काः अपि परिमेयसङ्ख्याः सन्ति ?

कोऽपि पूर्णाङ्कः एकपरिमेयसङ्ख्या मन्तुं शक्यते। उदाहरणार्थं पूर्णाङ्कः –5 एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति,यतोहि भवन्तः एताम् $\frac{-5}{1}$ इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति। पूर्णाङ्कं शून्यम् (0) अपि $0 = \frac{0}{2}$ अथवा $\frac{0}{7}$ इत्यादिरूपेण लेखितुं शक्यते। अतः एषा अपि एका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

अनेन प्रकारेण, परिमेयसङ्ख्यासु पूर्णाङ्काः भिन्नाः च सम्मिलिताः भवन्ति।

समतुल्याः परिमेय-सङ्ख्याः

एकां परिमेयसङ्ख्यां पृथक्-पृथक् अंशानां हराणां च प्रयोगं कुर्वन्तः लेखितुं शक्नुमः।

उदाहरणार्थम्, $\frac{-2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्यां विचारयन्तु।

$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times 2}{3\times 2} = \frac{-4}{6}$। वयं पश्यामः यत् $\frac{-2}{3}$ इति तत् एव अस्ति यत् $\frac{-4}{6}$ इति अस्ति।

तथैव $\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{(3\times(-5)} = \frac{10}{-15}$ अस्ति। अतः $\frac{-2}{3}$ तत् एव अस्ति यत् $\frac{10}{-15}$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$ इति अस्ति। एतादृश्यः परिमेयसङ्ख्याः याः परस्परं समानाः स्युः परस्परं समतुल्याः (equivalent) अथवा तुल्याः इति कथ्यन्ते।

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कथम् ?)

प्रयासं कुर्वन्तु

रिक्तस्थानानि पूरयन्ताम् :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\quad}{16} = \frac{25}{\quad} = \frac{-15}{\quad}$ (ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\quad}{14} = \frac{9}{\quad} = \frac{-6}{7}$

यदि कस्याश्चित् परिमेयसङ्ख्यायाः अंशं हरं च एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन गुणयामः तर्हि वयं प्रदत्तायाः परिमेयसङ्ख्यायाः समतुल्याम् (अथवा तुल्याम्) परिमेयसङ्ख्यां प्राप्नुमः। एतत् प्रायशः यथा समतुल्यभिन्नं प्राप्यते तद्वद् एव अस्ति।

गुणनेन इव एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन अंशं हरं च विभाज्य अपि समतुल्याः परिमेयसङ्ख्याः प्राप्यन्ते।

उदाहरणार्थम्,

$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)} = \frac{-2}{3}$, $\frac{-12}{24} = \frac{-12\div 12}{(24\div 12)} = \frac{-1}{2}$

वयम् $\frac{-2}{3}$ इत्येतम् $\frac{-2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ इत्येतम् - $\frac{10}{15}$ इत्यादिरूपेण लिखामः।

9.4 धनात्मिकाः ऋणात्मिकाः च परिमेयसङ्ख्याः

$\frac{2}{3}$ परिमेयसङ्ख्यां विचारयन्तु। अस्याः सङ्ख्यायाः अंशः हरः च उभौ धनात्मकौ पूर्णाङ्कौ स्तः। एतादृशी परिमेयसङ्ख्या एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या इति उच्यते।

अतः, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$ इत्यादयः धनात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. किम् 5 एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति ?
2. पञ्च अन्याः धनात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

$\frac{-3}{5}$ इत्यस्य अंशः एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति अपरञ्च अस्य हरः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। एतादृशी परिमेयसङ्ख्या **ऋणात्मिका-परिमेयसङ्ख्या** इति कथ्यते।

अतः $\frac{-5}{7}$, $\frac{-3}{8}$, $\frac{-9}{5}$ इत्यादयः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

- किम् $\frac{8}{-3}$ इति एका ऋणात्मिका सङ्ख्या अस्ति ? वयं जानीमः यत् $\frac{8}{-3} = \frac{8\times(-1)}{-3\times(-1)} = \frac{-8}{3}$ इति अस्ति, तथा च $\frac{-8}{3}$ एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति। अतः $\frac{8}{-3}$ एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. किम् -8 एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
2. पञ्च अन्याः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

- अनेन प्रकारेण, $\frac{5}{-7}$, $\frac{6}{-5}$, $\frac{2}{-9}$ इत्यादयः सर्वाः **ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः** सन्ति। ध्यानं यच्छन्तु यत् एतासाम् अंशाः धनात्मकाः सन्ति तथा च हराः ऋणात्मकाः सन्ति।
- सङ्ख्या 0 न तु एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति न च एका ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।
- $\frac{-3}{-5}$ अस्य विषये किं वक्तुं शक्यते ?

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् $\frac{3}{5} = \frac{3\times(1)}{5\times(1)} = \frac{3}{5}$ अस्ति। अतः, $\frac{3}{5}$ एका धनात्मिका परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{3}$ इत्यादयः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

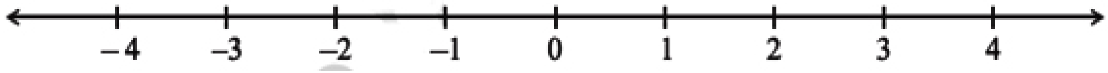
प्रयासं कुर्वन्तु

निम्नलिखितासु कतमाः सङ्ख्याः ऋणात्मिकाः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति ?

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{2}{9}$

9.5 एकस्यां रेखायां परिमेयसङ्ख्याः

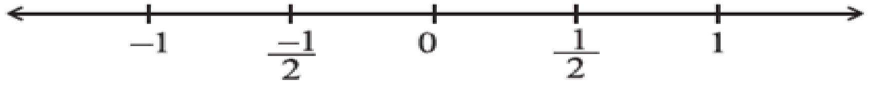
भवन्तः एतत् तु जानन्ति एव यत् कस्याञ्चित् सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्काः कथं निरूप्यन्ते। आयान्तु एतादृशीम् एकां रेखाम् आलिखामः।



शून्यस्य दक्षिणस्थान् बिन्दून् + इति चिह्नेन व्यक्तीकुर्मः एते च बिन्दवः धनात्मकान् पूर्णाङ्कान् दर्शयन्ति।

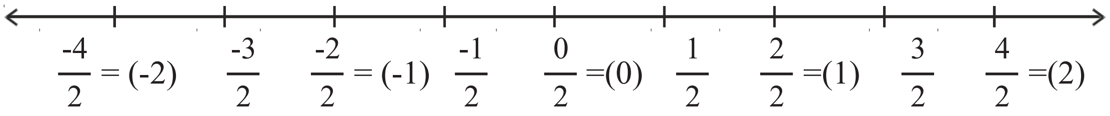
शून्यस्य वामस्थान् बिन्दून् – इति चिह्नेन व्यक्तीकुर्मः तथा च एते बिन्दवः ऋणात्मकान् पूर्णाङ्कान् दर्शयन्ति। सङ्ख्यारेखायां भिन्नानां निरूपणं कथं क्रियते इति एतद् अपि भवन्तः जानन्ति।
आयान्तु अधुना पश्याम यत् परिमेयसङ्ख्यानां सङ्ख्यारेखायां निरूपणं कथं कर्तुं शक्यते ?
आगच्छन्तु सङ्ख्यारेखायां $-\frac{1}{2}$ इत्येतां सङ्ख्यां निरूपयामः।

यथाहि धनात्मक-पूर्णाङ्कानां स्थितिविषये कृतम् आसीत् तथैव धनात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां निरूपणं शून्यस्य दक्षिणभागे करिष्यते तथा च ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां निरूपणं शून्यस्य वामभागे करिष्यते। भवन्तः $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य निरूपणं शून्यस्य कस्यां दिशि करिष्यन्ति ? यतो हि एषा ऋणात्मिका परिमेयसङ्ख्या वर्तते इति कारणेन एषा शून्यात् वामदिशं प्रति अङ्क्यिष्यन्ते।
भवन्तः जानन्ति यत् सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्कानाम् निरूपणकाले उत्तरोत्तराः पूर्णाङ्काः समानान्तरालेन अङ्क्यन्ते। सममेव 1 तथा च - 1 इति सङ्ख्ययोः युग्मः शून्य-सङ्ख्यातः समदूरस्थः वर्तते। अनेन प्रकारेण 2 तथा च –2 अन्यच्च 3 तथा च –3 अपि समदूरस्थाः युग्माः सन्ति।
तेन एव प्रकारेण, $\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्ये अपि शून्यात् समदूरस्थे भविष्यतः। वयं जानीमः यत् $\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्या केन प्रकारेण सङ्ख्यारेखायाम् अङ्क्यते। एषा परिमेयसङ्ख्या तस्मिन् बिन्दौ अङ्क्यते, यः 0 तथा च 1 इति एताभ्यां समानान्तराले (मध्ये) वर्तते अर्थात् शून्यस्य एकस्य च अर्धान्तराले अस्ति। अतः, $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य अङ्कनं 0 तथा च -1 इत्येताभ्याम् अर्धान्तराले करिष्यते।



वयं जानीमः यत् $\frac{3}{2}$ इति सङ्ख्यारेखायां कथम् अङ्क्यते। एषा संख्या शून्यस्य दक्षिणं प्रति 1 तथा च 2 इत्येतयोः मध्ये अर्धान्तराले अङ्क्यते। आगच्छन्तु इदानीं सङ्ख्यारेखायाम् $\frac{-3}{2}$ इति अङ्कयामः। एतत् शून्यस्य वामं प्रति तावत् दूरम् अङ्कयिष्यते यावान् 0 तथा च $\frac{3}{2}$ मध्ये अन्तरालः अस्ति।

अवरोहिक्रमे $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}$ (=-1), $\frac{-3}{2}$, $\frac{-4}{2}$ (=-2) इति प्राप्ताः सन्ति। अनेन प्रदर्शितं भवति यत् $\frac{-3}{2}$ इति -1 एवञ्च -2 इत्येतयोः मध्ये अर्धान्तराले स्थितम् (अङ्कितम्) भविष्यति।



एवमेव, $\frac{-5}{2}$ तथा च $\frac{-7}{2}$ इति सङ्ख्यारेखायाम् अङ्कयन्तु।

अनेन प्रकारेण, $-\frac{1}{3}$ इति संख्या सङ्ख्यारेखायाम् शून्यस्य वामतः तावति अन्तराले एव

भविष्यति यावान् अन्तरालः शून्यस्य दक्षिणभागे वर्तते।

अतः यथा उपरि कृतम्, $-\frac{1}{3}$ इत्येतत् सङ्ख्यारेखायां निरूपयितुं शक्यते।

एकवारं यदि वयम् $-\frac{1}{3}$ इति संख्यायाः सङ्ख्यारेखायां निरूपणं कथं क्रियते इति अधिगच्छामः तर्हि वयम्

$-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$, ... इत्यादि सङ्ख्यानां निरूपणं सङ्ख्यारेखायां कर्तुं शक्नुमः। विभिन्न-हरैः युक्ताः

अन्याः परिमेयसङ्ख्याः अपि अनेन एव प्रकारेण सङ्ख्यारेखायां निरूपयितुं शक्नुमः।

9.6 मानकरूपेण परिमेयसङ्ख्याः

अधोलिखिताः परिमेयसङ्ख्याः पश्यन्तु

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

एतासां सर्वासां परिमेयसङ्ख्यानां हराः धनात्माकाः पूर्णाङ्काः सन्ति तथा च अंशानां हराणाम् अथ च मध्ये केवलम् एकः सार्वगुणनखण्डः (common factor) अस्ति। सममेव ऋणात्मकचिह्नम् (-) केवलम् अंशे एव स्थितम् अस्ति। एतादृश्यः परिमेयसङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्ताः परिमेयसङ्ख्याः इति कथ्यन्ते।

यदि कस्याश्चित् परिमेयसंख्यायाः हरः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवेत् तथा च तस्याः अंशे हरे च 1 तः अतिरिक्तः कश्चन सार्वगुणनखण्डः न स्यात् तर्हि सा परिमेयसङ्ख्या मानकरूपेण व्यक्ताः इति कथ्यते यदि कापि परिमेयसंख्या मानकरूपेण नास्ति तदा सा तस्याः मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते।
स्मरन्तु यत् भिन्नानि तदीय-न्यूनतमरूपैः अभिव्यक्तीकर्तुम् अस्माभिः तेषाम् अंशाः एवं च हराः एकेनैव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन विभाजिताः आसन्। वयम् अस्य विधेः प्रयोगं परिमेयसङ्ख्यानां तदीय-मानकरूपैः अभिव्यक्त्यर्थं करिष्यामः।

उदाहरणम् 1 $\frac{-45}{30}$ इति मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु (व्यक्तं कुर्वन्तु)

समाधानम् अस्माकं पार्श्वे अस्ति $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

वयं वारद्वयं विभक्तवन्तः। प्रथमवारं 3 इति संख्यया पुनश्च 5 इति संख्यया। अस्य समाधानम् अधोनिर्दिष्ट-विधिना अपि कर्तुं शक्यते स्म -

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

अस्मिन् उदाहरणे पश्यन्तु यत् अत्र 15 इति संख्या 45 तथा च 30 इति संख्ययोः महत्तम-समापवर्तिका अस्ति।

अनेन प्रकारेण कामपि परिमेयसङ्ख्यां मानकरूपेण व्यक्तिकर्तुं वयं तस्याः अंशं हरं च तयोः महत्तमसमापवर्तकेण, यदि किमपि ऋणचिह्नं भवेत् तस्य अवधानं विना विभाजयाम। (ऋणचिह्नविषये किमर्थम् अवधानं न दातव्यम् इति कारणं वयम् आगामिकक्ष्यासु ज्ञास्यामः।) यदि ऋणचिह्नं हरे अस्ति तर्हि –म.स.द्वारा भागं यच्छन्तु)

उदाहरणम् 2 मानकरूपेण परिवर्तयन्तु

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

समाधानम्

(i) 36 तथा च 24 एतयोः महत्तमः समापवर्तकः 12 अस्ति।

अतः यदि अंशं हरं च –12 द्वारा विभक्तीकुर्मः तर्हि मानकरूपं प्राप्स्यामः।

अनेन प्रकारेण, $\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$

(ii) 3 तथा च 15 एतयोः महत्तमः समापवर्तकः 3 अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-3)}{(-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

प्रयासं कुर्वन्तु

मानकरूपं ज्ञायताम् (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

9.7 परिमेयसङ्ख्यानां तुलना

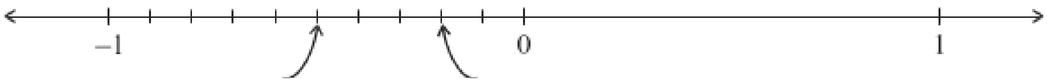
वयम् एतत् जानीमः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः द्वयोः च भिन्नयोः तुलना कथं क्रियते तथा च एतदपि जानीमः यत् एतयोः कः बृहत्तरः अस्ति कः च लघुतरः वर्तते। आयान्तु इदानीं परिमेयसङ्ख्यानां तुलना कथं कर्तुं शक्यते इति पश्याम।

- $\frac{2}{3}$ तथा च $\frac{5}{7}$ सदृश्योः द्वयोः धनात्मक-परिमेयसंख्ययोः तुलना अपि तेनैव प्रकारेण कर्तुं शक्यते येन प्रकारेण वयं भिन्नानां स्थितीनां विषये पूर्वमेव अधीतवन्तः स्मः।

- सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगं कुर्वती मेरी $-\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{5}$ इत्येतयोः द्वयोः ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनां कृतवती। सा जानाति स्म यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः सः पूर्णाङ्कः बृहत्तरः आसीत् यः अपरस्य पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः आसीत्।

  उदाहरणार्थम्, सङ्ख्या-रेखायाम् उपरि 5 इति पूर्णाङ्कः 2 इति पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः अस्ति तथा च $5 > 2$ अस्ति। सङ्ख्यारेखायां –2 इति पूर्णाङ्कः - 5 इति पूर्णाङ्कस्य दक्षिणे स्थितः अस्ति तथा च $-2 > -5$ अस्ति।

  सा अस्य विधेः प्रयोगं परिमेयसङ्ख्यानां कृते अपि अकरोत्। सा जानाति स्म यत् सङ्ख्यारेखायां परिमेयसङ्ख्याः कथं निरूप्यन्ते। सा $-\frac{1}{2}$ एवञ्च $-\frac{1}{5}$ इति अधः प्रदर्शितानुसारम् अङ्कितवती।



$\frac{-1}{2} = \frac{-5}{10}$ $\frac{-1}{5} = \frac{-2}{10}$

किं सा बिन्दुद्वयं सम्यक् प्रकारेण अङ्कितवती ? सा कथं किमर्थं च $-\frac{1}{2}$ इत्यस्य $\frac{-5}{10}$ इति रूपेण तथा च $-\frac{1}{5}$ इत्यस्य $\frac{-2}{10}$ इति रूपेण परिवर्तनं कृतवती ?

सा ज्ञातवती यत् $-\frac{1}{5}$ इति परिमेयसङ्ख्या $-\frac{1}{2}$ इति परिमेयसङ्ख्यायाः दक्षिणे अस्ति । अनेन प्रकारेण, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ अस्ति अथवा $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ अस्ति ।

किं भवन्तः $-\frac{3}{4}$ एवञ्च $-\frac{2}{3}$ इत्येतयोः तथा च $-\frac{1}{2}$ एवञ्च- $\frac{1}{5}$ इत्येतयोः तुलनां कर्तुम् अर्हन्ति ?

वयं भिन्नानां स्वकीयाध्ययनेन एतत् जानीमः यत् $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ इति अस्ति । सममेव मेरी $-\frac{1}{2}$ तथा च $-\frac{1}{5}$ एतयोः कृते किं प्राप्तवती ? किम् एतत् अस्य साक्षात् विपरीतं नासीत् ।

भवन्तः पश्यन्ति यत् $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ अस्ति, परन्तु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ अस्ति ।

किं भवन्तः $-\frac{3}{4}$ एवञ्च $-\frac{2}{3}$ तथा च $-\frac{1}{2}$ एवञ्च- $\frac{1}{5}$ इति एतेषां कृते अपि एतादृशम् एव परिणामं पश्यन्ति ?

मेरी स्मरति यत् सा पूर्णाङ्केषु अपठत् यत् $4 > 3$ अस्ति, किन्तु $-4 < -3$ अस्ति $5 > 2$ इति अस्ति परन्तु $-5 < -2$ इत्यादिः ।

- ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां युग्मानां स्थितिः अपि एवमेव अस्ति । द्वयोः ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनार्थम्, वयं तयोः तुलनां तदीय-चिह्नानि परित्यजन्तः कुर्मः तत्पश्चात् असमिकायाः (inequality) चिह्नं परिवर्तयामः।

  उदाहरणार्थम्, $-\frac{7}{5}$ एवञ्च $-\frac{5}{3}$ एतयोः तुलनार्थम् आदौ वयम् $\frac{7}{5}$ एवञ्च $\frac{5}{3}$ इत्येतयोः तुलनां कुर्मः।

  अस्माकं कृते $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ इति प्राप्तं भवति अस्माच्च वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् $-\frac{7}{5} > -\frac{5}{3}$ इति अस्ति।

  एतादृशानि पञ्च अन्यानि युग्मानि स्वीकुर्वन्तु पुनश्च तेषां तुलनां कुर्वन्तु ।

  किं बृहत्तरा अस्ति $-\frac{3}{8}$ अथवा $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ अथवा $-\frac{3}{2}$?

कस्याश्चित् ऋणात्मिकायाः धनात्मिकायाः च परिमेयसङ्ख्यायाः तुलना सुस्पष्टा अस्ति । सङ्ख्यारेखायाम्, एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या शून्यस्य वामभागे स्थिता भवति एका च धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या शून्यस्य दक्षिणभागे स्थिता विद्यते । अतः एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या सदैव धनात्मक-परिमेयसङ्ख्यातः ह्रस्वा भवति ।

इत्थमेव $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ अस्ति ।

- $\frac{-3}{-5}$ एवञ्च $\frac{-2}{-7}$ इति परिमेयसङ्ख्ययोः तुलनार्थं प्रथमं तयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मानकरूपेण परिवर्तनं कुर्वन्तु तत्पश्चात् तयोः तुलनां कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 3 किम् $\frac{4}{-9}$ तथा च $\frac{-16}{36}$ इति एकामेव परिमेयसङ्ख्यां निरूपयतः ?

समाधानम् आम्, यतोहि $\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{-9\times(-4)} = \frac{-16}{36}$ अथवा $\frac{-16}{36} = \frac{-16\div -4}{36\div -4} = \frac{4}{-9}$ इति अस्ति।

9.8 द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये परिमेयसङ्ख्याः

रेशमा 3 तथा च 10 इत्यनयोः मध्ये पूर्णसङ्ख्याः गणयितुम् इच्छति स्म। सा गतकक्ष्यासु एतत् ज्ञातवती आसीत् यत् 3 एवञ्च 10 इत्यनयोः मध्ये षट् पूर्णसङ्ख्याः भविष्यन्ति। अनेन एव प्रकारेण सा - 3 तथा च 3 इत्यनयोः मध्यस्थान् पूर्णाङ्कान् अपि ज्ञातुम् इच्छति स्म। -3 तथा च 3 इत्यनयोः मध्यस्थाः पूर्णाङ्काः -2,-1, 0, 1 तथा च 2 इति सन्ति। एवमेव -3 तथा च 3 मध्ये निश्चितरूपेण पञ्च (5) पूर्णाङ्काः सन्ति। किम् -3 तथा च -2 इत्यनयोः मध्ये कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति ? नहि - 3 तथा च – 2 इत्यनयोः मध्ये कश्चन अपि पूर्णाङ्कः नास्ति। द्वयोः क्रमागत-पूर्णाङ्कयोः मध्ये पूर्णाङ्कसङ्ख्या शून्या (0) भवति।
अनेन प्रकारेण वयं प्राप्नुमः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः मध्ये पूर्णाङ्कसङ्ख्या सीमिता परिमिता वा भवति।
किम् एतत् परिमेयसङ्ख्यानां स्थितौ अपि भविष्यति ?

रेशमा $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इति द्वे परिमेयसङ्ख्ये स्वीकृतवती।

सा एतयोः संख्ययोः परिवर्तनं समानहर-परिमेयसङ्ख्ययोः कृतवती।

अतः, $\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15}$ तथा च $\frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$ इति अस्ति।

अस्माभिः प्राप्तम् अस्ति यत् $\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15}$ अस्ति अथवा $\frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ अस्ति।

एवम्प्रकारेण सा $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इत्येतयोः मध्यस्थाः परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ ज्ञातवती।

किम् $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-1}{3}$ इत्यनयोः मध्ये केवलमात्रम् $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ एतावत्यः एव परिमेयसङ्ख्याः वर्तन्ते ?

$\frac{-3}{5} = \frac{-18}{30}$ तथा च $\frac{-8}{15} = \frac{-16}{30}$ इति अस्माकं पार्श्वे अस्ति।

सममेव $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$ अस्ति। अर्थात् $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$ अस्ति।

अतः $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{-1}{3}$ तथा च $\frac{-3}{5}$ इत्यनयोः मध्ये वयम् एकाम् अन्यां परिमेयसङ्ख्यां परिज्ञाय सफलाः अभवाम।

एतं विधिं प्रयुज्य भवन्तः द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये यावतीः इच्छन्ति तावतीः परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणार्थम्, $\frac{-3}{5} = \frac{-3\times30}{5\times30} = \frac{-90}{150}$ तथा च $\frac{-1}{3} = \frac{-1\times50}{3\times50} = \frac{-50}{150}$ इति अस्ति।

वयम् $\frac{-90}{150}$ तथा च $\frac{-50}{150}$ इत्यनयोः मध्ये अर्थात् $\frac{-3}{5}$ एवञ्च $\frac{-1}{3}$

इत्यनयोः मध्ये एकोनचत्वारिंशत् 39

परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-89}{150}, \frac{-88}{150}, \frac{-87}{150}, \ldots\ldots\ldots \frac{-51}{150}$ इति प्राप्नुमः।

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-5}{7}$ तथा च $\frac{-3}{8}$ इत्यनयोः मध्ये पञ्च परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु ।

भवन्तः ज्ञास्यन्ति यत् एषा सूची कदापि समाप्ता न भविष्यति।

किं भवन्तः $\frac{-5}{7}$ तथा च $\frac{-8}{7}$ इत्यनयोः मध्येस्थिताः पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लेखितुं शक्नुवन्ति ?

वयं द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये असीमिताः (अथवा अपरिमितरूपेण नैकाः) परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 4 – 2 तथा च – 1 इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।

समाधानम् आयान्तु –1 तथा च –2 इत्येते पञ्चहरपरिमेयसङ्ख्या-रूपैः लिखामः।

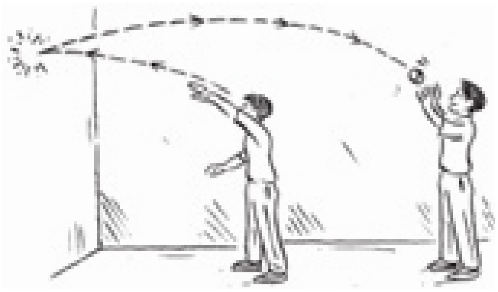
अस्माकं पार्श्वे अस्ति $-1 = \frac{-5}{5}$ एवञ्च $-2 = \frac{-10}{5}$ (-10)/5

अतः, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ इति अस्ति, अथवा $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

– 2 तथा च –1 इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ इति भविष्यन्ति।

(भवन्तः $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ तथा च $\frac{-6}{5}$ इत्येतासु याः काः अपि तिस्रः परिमेयसङ्ख्याः स्वीकर्तुं शक्नुवन्ति।)

उदाहरणम् 5 अधोलिखत-प्रतिरूपवत् अन्याः चतस्रः सङ्ख्याः लिखन्तु -



$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots\ldots$

समाधानम् अस्माभिः लब्धम्

$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times2}{3\times2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times3}{3\times3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times4}{3\times4}$

अथवा $\frac{-1\times1}{3\times1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times2}{3\times2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times3}{3\times3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times4}{3\times4} = \frac{-4}{12}$

अनेन प्रकारेण, वयम् एतासु सङ्ख्यासु एकं प्रतिरूपं पश्यामः।

$\frac{-1\times5}{3\times5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times6}{3\times6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times7}{3\times7} = \frac{-7}{21}$ इति अन्याः सङ्ख्याः भविष्यन्ति।

प्रश्नावली 9.1

1. अधोलिखित-परिमेयसङ्ख्यानां मध्ये पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) –1 तथा च 0 (ii) –2 तथा च –1 (iii) (-4)/5 एवञ्च (-2)/3 (iv) - 1/2 तथा च 2/3

2. अधोलिखित-प्रतिरूपेषु प्रत्येकस्मिन् अन्याः चतस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots\ldots$

   (iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{-4}{-24}, \ldots\ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots\ldots$

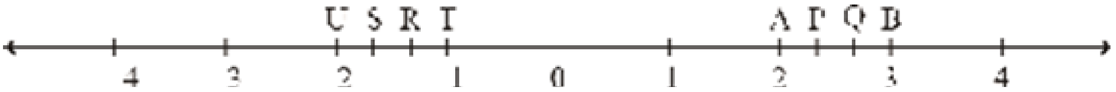
3. निम्नलिखतानां समतुल्याः चतस्रः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु

   (i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. एकां सङ्ख्यारेखाम् आलिखन्तु तस्याः उपरि निम्नलिखिताःपरिमेयङ्ख्याःलिखन्तु

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एकस्यां सङ्ख्यारेखायाम् P, Q, R, S, T, U, A तथा च B इति रेखाबिन्दवः अनेन प्रकारेण सन्ति यत् TR = RS = SU तथा च AP = PQ = QB इति अस्ति। P, Q, R तथा च S इत्येतैः द्वारा निरूपिताः परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।



6. निम्नलिखतेषु कतमानि युग्मानि एकामेव परिमेयसङ्ख्यां निरूपयन्ति ?

   (i) $\frac{-7}{21}$ तथा च $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ तथा च $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ तथा च $\frac{2}{3}$

   (iv) $\frac{-3}{5}$ तथा च $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ तथा च $\frac{-24}{15}$

   (vi) $\frac{1}{3}$ तथा च $\frac{-1}{9}$ (vii) $\frac{-5}{-9}$ तथा च $\frac{5}{-9}$

7. अधोलिखताः परिमेयसङ्ख्याः तदीय-सरलतमरूपैः लिखन्तु

   (i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. >, <, तथा च = इति सङ्केतेषु उचितं सङ्केतं चित्वा रिक्तस्थानानि पूरयन्तु

   (i) $\frac{-5}{7}$ ☐ $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5}$ ☐ $\frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8}$ ☐ $\frac{14}{-16}$

   (iv) $\frac{-8}{5}$ ☐ $\frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3}$ ☐ $\frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11}$ ☐ $\frac{-5}{11}$

   (vii) 0 ☐ $\frac{-7}{6}$

9. अधोलिखितेषु प्रत्येकं परिमेयसङ्ख्यासु कतमा बृहत्तरा सङ्ख्या अस्ति ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. अधोलिखताः परिमेयसङ्ख्याः आरोहिक्रमेण लिखन्तु

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

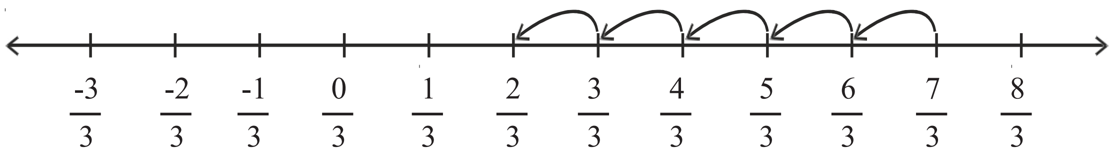
9.9 परिमेयसङ्ख्यासु सङ्क्रियाः

भवन्तः जानन्ति यत् पूर्णाङ्कानां भिन्नानां योजनम्, व्यवकलनम्, गुणनं भजनं (भागः) च कथं क्रियते। आयान्तु आसाम् आधारभूतानां सङ्क्रियाणां परिमेयसङ्ख्यासु अध्ययनं कुर्मः।

9.9.1 योगः

- कल्पनां कुर्वन्तु समानहरयुते द्वे परिमेयसङ्ख्ये, $\frac{7}{3}$ तथा च $\frac{-5}{3}$ इत्येते परिमेयसङ्ख्ये योजयामः। वयम् $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः।

सङ्ख्यारेखायाम्, अस्माभिः प्राप्यते -



क्रमागत-बिन्दुद्वयस्य मध्ये अन्तरालः $\frac{1}{3}$ अस्ति। अतः, $\frac{7}{3}$ इत्यनेन $\frac{-5}{3}$ इति योजनस्य अर्थः अस्ति यत् $\frac{7}{3}$ इत्यस्य वामं प्रति 5 पदानि सरन्तु। वयं कुत्र प्राप्तवन्तः? वयम् $\frac{2}{3}$ इति प्राप्नुमः। अतः $\frac{7}{3} + \frac{-5}{3} = \frac{2}{3}$ इति अस्ति।

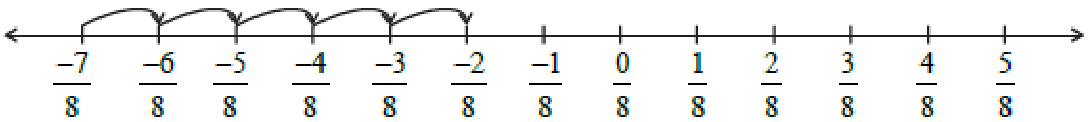
आगच्छन्तु एतम् अनेन विधिना कर्तुं प्रयतामहे :

$$\frac{7}{3} + \frac{(-5)}{3} = \frac{7+(-5)}{3} = \frac{2}{3}$$

अस्माभिः तत् एव उत्तरं प्राप्यते।

$\frac{6}{5} + \frac{(-2)}{5}, \frac{3}{7} + \frac{(-5)}{7}$ इत्यपि उपर्युक्तविधिना ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु अवेक्षणं च कुर्वन्तु यत् किम् उत्तरद्वयं समानम् अस्ति।

अनेन एव प्रकारेण $\frac{(-7)}{8} + \frac{5}{8}$ इति अधोलिखितवत् भविष्यति -



अस्माभिः किं प्राप्यते ?

सममेव $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-7+5}{8}$? किं द्वयोः मानं समानम् अस्ति ?

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-13}{7} + \frac{6}{7}$ तथा च $\frac{19}{5} + \frac{-7}{5}$ इति ज्ञायताम्।

अनेन प्रकारेण, वयं पश्यामः यत् समानहर-परिमेयसङ्ख्यानां योजनसमये वयं हरं तत्रैव स्थापयन्तः अंशान् योजयामः।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-11}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-11+7}{5} = \frac{-4}{5}$ इति अस्ति।

- वयं पृथक् - पृथक् हरवत्यौ द्वे परिमेयसङ्ख्ये कथं योजयामः ? भिन्नवत् वयं प्रथमम् एतेषां हराणां लघुतमसमापवर्तकं ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः ततः परं वयम् एतादृशीः समतुल्याः परिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः यासां हराः एते लघुतमसमापवर्तकाः स्युः। तत्पश्चात् वयम् एते परिमेयसङ्ख्ये योजयामः।

उदाहरणार्थम्, आगच्छन्तु $\frac{-7}{5}$ एवञ्च $\frac{-2}{3}$ इति योजयामः। 5 तथा च 3 इत्यनयोः लघुतमसमापवर्तकं 15 इति अस्ति।

अतः, $\frac{-7}{5} = \frac{-21}{15}$ तथा च $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15}$ अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{-7}{5} + \frac{-2}{3} = \frac{-21}{15} + \frac{-10}{15} = \frac{-31}{15}$ इति अभवत्।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(i) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{3}$

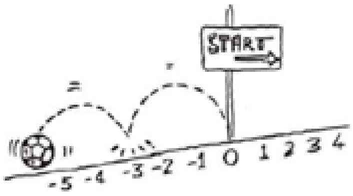
(ii) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{11}$

योज्यप्रतिलोमः

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7}$ इति कस्य समानं भविष्यति ?

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-4+4}{7} = 0$ इति अस्ति।सममेव $\frac{-4}{7} + \frac{-4}{7} = 0$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0 = \frac{2}{3} + \frac{-2}{3}$ इति अस्ति।



किं भवन्तः स्मरन्ति यत् पूर्णाङ्केषु –2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः 2 इति अस्ति तथा च 2 इति – 2 इति पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः भवति। परिमेयसङ्ख्याभ्यः, वयं वदामः यत् $\frac{-4}{7}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{4}{7}$ अस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति तथा च $\frac{4}{7}$ परिमेयसङ्ख्या $\frac{-4}{7}$ अस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति। अनेन प्रकारेण, $\frac{-2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{2}{3}$ इत्यस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति तथा च $\frac{2}{3}$ इति परिमेयसङ्ख्या $\frac{-2}{3}$ इत्यस्याः योज्यः प्रतिलोमः अस्ति।

उदाहरणम् 6 सतपालः P इति कस्माच्चित् स्थानात् पूर्वदिशायाम् $\frac{2}{3}$ कि.मी. चलति ततश्च पुनः पश्चिमदिशायां $1\frac{5}{7}$ कि.मी. चलति अधुना सः P स्थानात् कुत्र अस्ति ?

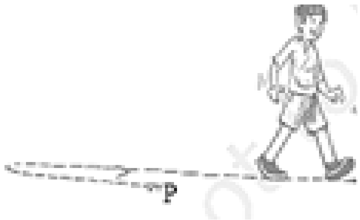
प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}$ तथा च $\frac{5}{7}$ योज्यप्रतिलोमः कः अस्ति ?

समाधानम् आयान्तु पूर्वदिशायाम् अतिक्रमितम् अन्तरालं धनात्मकचिह्नेन व्यक्तीकुर्मः । अतः, पश्चिमदिशायाम् अतिक्रमितम् अन्तरालम् ऋणात्मकचिह्नेन व्यक्तीकुर्मः । अनेन प्रकारेण, P बिन्दुतः सतपालस्य दूरम् किलोमीटरमानेन भविष्यति ।

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{(-22)}{21}=-1\frac{1}{21}$$



यतो हि एतत् विप्रकृष्टत्वम् ऋणात्मकम् अस्ति,अतः सतपालः पश्चिमदिशि $1\frac{1}{21}$ मितकिलोमीटरदूरं वर्तते ।

9.9.2 व्यवकलनम्

सविता $\frac{5}{7}$ तथा च $\frac{3}{8}$ इति द्वयोः परिमेयसङ्ख्योः अन्तरम् अनेन विधिना ज्ञातवती -

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानाति स्म यत् a तथा च b इति द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते $a-b=a+(-b)$ इति लेखितुं शक्यते । सा एवं परिमेयसङ्ख्यानां कृते अपि ज्ञातवती च यत् $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{-3}{8}=\frac{19}{56}$ इति अस्ति ।

उभे (फरीदा सविता च) एकमेव (समानम्) अन्तरं लब्धवत्यौ ।

द्वाभ्यां विधिभ्याम्, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}, \frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ इति ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । किं भवन्तः समानानि उत्तराणि प्राप्नुवन्ति ?

अतः वयं कथयामः यत् द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः व्यवकलनसमये व्यवकल्यमानायाः सङ्ख्यायाः योज्य-प्रतिलोमः अन्यपरिमेय-सङ्ख्यया सह योजनीयः ।

अनेन प्रकारेण $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः

$$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{(-17)}{15}=-1\frac{2}{15}$$ इति अस्ति ।

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ इत्यस्य किं भविष्यति ? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$ इति भविष्यति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

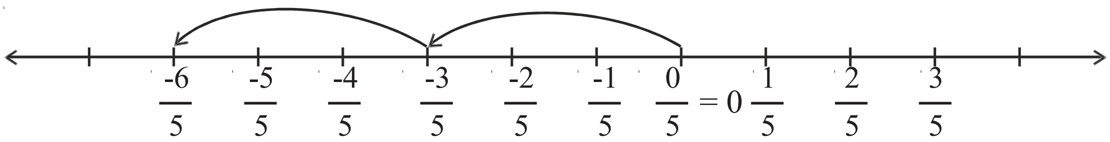
ज्ञायताम्

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$

(ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

9.9 .3 गुणनम्

आयान्तु $\frac{-3}{5}$ इति परिमेयसङ्ख्यां 2 इति संख्यया गुणयाम अर्थात् वयम् $\frac{-3}{5}\times 2$ इति ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः । सङ्ख्यारेखायाम् अस्य अर्थः भविष्यति यत् $\frac{3}{5}$ इत्यस्य वामं प्रतिपदद्वयं गमनम् इति ।



वयं कुत्र प्राप्नुमः ? वयं $\frac{-6}{5}$ इति प्राप्नुमः । आगच्छन्तु वयम् एतत् भिन्नेन विधिना जानीमः

$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3\times2}{5} = \frac{-6}{5}$

वयं ताम् एव परिमेयसङ्ख्यां प्राप्नुमः । उभयोः विध्योः प्रयोगं कुर्वन्तः $\frac{-4}{7} \times 3$ तथा च $\frac{-6}{5} \times 4$ इति ज्ञायताम् । भवन्तः किं पश्यन्ति ?

अतः अस्माभिः एतत् ज्ञायते यत् यदि एकां परिमेयसङ्ख्यां केनचित् धनात्मकपूर्णाङ्केन गुणयामः तर्हि वयम् अंशं तेन पूर्णाङ्केन गुणयामः तथा च हरं तत्रैव स्थापयामः।

आयान्तु इदानीम् एकां परिमेयसङ्ख्याम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन गुणयामः।

$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2\times(-5)}{9} = \frac{10}{9}$

स्मरन्तु यत् -5 इति $\frac{-5}{1}$ इति रूपेण अपि लेखितुं शक्यते ।

अतः $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2\times(-5)}{9\times1}$ इति अस्ति ।

अनेन प्रकारेण $\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3\times(-2)}{11} = \frac{-6}{11}$ इति अस्ति ।

उपर्युक्त-प्रेक्षणानाम् आधारेण अस्माभिः ज्ञायते यत् $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3\times5}{8\times7} = \frac{-15}{56}$ इति अस्ति ।

यथा वयं भिन्नानां स्थितौ कृतवन्तः तथैव वयं द्वे परिमेयसङ्ख्ये अधोलिखितविधिना गुणयामः ।

चरणः 1 उभयोः परिमेयसङ्ख्ययोः अंशान् गुणयन्तु ।

चरणः 2 उभयोः परिमेयसङ्ख्ययोः हरान् गुणयन्तु ।

चरणः 3 $\frac{\text{प्रथमचरणे लब्धः परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणे लब्धः परिणामः}}$ इति रूपेण गुणनफलं लिखन्तु ।

अनेन प्रकारेण $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3\times2}{5\times7} = \frac{-6}{35}$ इति अस्ति ।

सममेव $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{(-5)\times(-9)}{8\times7} = \frac{45}{56}$ इति अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां गुणनफलं किं भविष्यति?

(i) $\frac{-3}{5} \times 7$ (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)$

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम्

(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

9.9.4 विभाजनम्

भिन्नानां व्युत्क्रम-विषये वयं पूर्वमेव पठितवन्तः स्म । $\frac{2}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः कः अस्ति ? अयम् $\frac{7}{2}$ इति अस्ति । वयम् इमाम् अवधारणां परिमेयसङ्ख्यानां व्युत्क्रमाणां कृते अपि प्रवर्तयितुं शक्नुमः । अनेन प्रकारेण $\frac{-2}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{7}{-2}$, अर्थात् (-7)/2 इति भविष्यति तथा च $\frac{-3}{5}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{-5}{3}$ इति भविष्यति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ इत्यनयोः

व्युत्क्रमौ किं भविष्यतः?

परिमेयसङ्ख्यायाः तदीय-व्युत्क्रमेण गुणनफलम्

कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः तस्याः व्युत्क्रमेण गुणनफलं सदैव 1 इति भवति।

उदाहरणार्थम् $\frac{-4}{9} \times \frac{(-4)}{9}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः)

$= \frac{-4}{9} \times \frac{(-9)}{4} = 1$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$ इति अस्ति।

कानिचित् अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य अस्य प्रेक्षणस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

सविता $\frac{4}{9}$ इति एकस्याः परिमेयसङ्ख्यायाः $\frac{-5}{7}$ इति अन्यया परिमेयसङ्ख्यया अनेन प्रकारेण विभाजनं कृतवती यत्

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

सा भिन्नानाम् इव व्युत्क्रमस्य अवधारणायाः प्रयोगं कृतवती।

अर्पितः आदौ $\frac{4}{9}$ इत्यस्य विभाजनं $\frac{5}{7}$ द्वारा कृतवान् तथा च $\frac{28}{45}$ इति प्राप्नोत्।

अन्ते, सः अवदत् यत् $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$ इति अस्ति। सः एतत् कथं प्राप्नोत् ?

सः ऋणात्मक-चिह्नानि परित्यजन् ताः भिन्नानि इव विभाजितवान् तत्पश्चात् प्राप्त-परिणामेन सह ऋणात्मकचिह्नम् योजितवान्।

उभौ (सविता अर्पितः च) $\frac{-28}{45}$ इति एकमेव मानं प्राप्तवन्तौ। $\frac{2}{3}$ इत्यस्य $\frac{-5}{7}$ इत्यनेन द्वाभ्यां विधिभ्यां विभाजनं कृत्वा पश्यन्तु यत् किं भवन्तः एकमेव उत्तरं प्राप्नुवन्ति।

उपर्युक्त-वर्णनेन एतत् प्रदर्शितं भवति यत् एकां परिमेयसङ्ख्यां कयाचित् अन्यपरिमेयसङ्ख्यया विभक्तीकर्तुं वयं तां परिमेयसङ्ख्याम् अन्यपरिमेयसङ्ख्यायाः व्युत्क्रमेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times$ $\frac{-2}{3}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $= \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् : (i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

प्रश्नावली 9.2

1. योगः ज्ञायताम्

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{11} + \frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

2. ज्ञायताम्

(i) $\frac{7}{24} - \frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63} - \left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13} - \left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8} - \frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9} - 6$

3. गुणनफलं ज्ञायताम्

(i) $\frac{9}{2} \times \left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10} \times (-9)$ (iii) $\frac{-6}{5} \times \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$

4. अधोलिखितानां मानानि ज्ञायन्ताम्

(i) $(-4) \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5} \div 2$ (iii) $\frac{-4}{5} \div (-3)$

(iv) $\frac{1}{8} \div \frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13} \div \frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12} \div \left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. कापि सङ्ख्या याम् $\frac{p}{q}$ इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यत्र p एवञ्च q पूर्णाङ्कौ स्तः तथा च $q \neq 0$ इति अस्ति, परिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते। $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}$, 3 प्रभृतयः सङ्ख्याः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

2. सर्वे पूर्णाङ्काः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

3. यदि कस्याश्चित् परिमेयसङ्ख्यायाः अंशहरौ एकेन एव शून्येतरेण पूर्णाङ्केन गुण्येते अथवा विभक्तीक्रियेते तदा अस्माभिः एका सङ्ख्या प्राप्यते या प्रदत्तायाः परिमेयसङ्ख्यायाः समतुल्या परिमेयसङ्ख्या भवति। उदाहरणार्थम्, $\frac{-3}{7} = \frac{-3\times2}{7\times2} = \frac{-6}{14}$ इति अस्ति। अतः वयं कथयामः यत् $\frac{-6}{14}$

इति सङ्ख्या $\frac{-3}{7}$ इति संख्यायाः एकं समतुल्यं रूपम् अस्ति। सममेव अवधानं यच्छन्तु यत् $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2}$ $= \frac{-3}{7}$ इति अस्ति।

4. परिमेयसङ्ख्यानां वर्गीकरणं धनात्मक-ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्यानां रूपैः क्रियते। यदा अंशः हरः च उभौ एव धनात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् अथवा ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् तदा सा परिमेयसङ्ख्या धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते। यदा अंशहरयोः मध्ये एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् सा परिमेयसङ्ख्या एका ऋणात्मकपरिमेयसङ्ख्या इति कथ्यते।

   उदाहरणार्थम्, $\frac{3}{8}$ एका धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति तथा च $\frac{-8}{9}$ इति एका ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

5. शून्य-सङ्ख्या (0) न तु धनात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति नैव च ऋणात्मक-परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

6. काचिदपि परिमेयसङ्ख्या स्वीयमानकरूपे तदा मन्यते यदा तस्याः हरः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवेत् तथा च अंशहरयोः च 1 तः अतिरिच्य कश्चन सार्वगुणनखण्डः न भवेत्। $\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{7}$ प्रभृतयः सङ्ख्याः मानकरूपेण सन्ति।

7. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः मध्ये असीमिताः परिमेयसङ्ख्याः भवन्ति।

8. द्वयोः समानहरयोः परिमेयसङ्ख्ययोः योगं ज्ञातुं तासाम् अंशाः योजयितुं शक्यन्ते तथा च हरं तत्रैव स्थापयित्वा योगः ज्ञातुं शक्यते। विभिन्नहरयुते द्वे परिमेयसङ्ख्ये योजयितुम् आदौ उभयोः हरयोः लघुतमसमापवर्तकं ज्ञायते ततः परं च उभे परिमेयसङ्ख्ये ल.स. इत्यस्य समानयहरयोः द्वयोः समतुल्य-परिमेयसङ्ख्ययोः परिवर्त्य योज्यते।

   उदादरणार्थम्, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ इति अस्ति। अत्र 3 एवञ्च 8 इत्यनयोः लघुतमसमापवर्तकं 24 इति अस्ति।

9. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः व्यवकलनार्थं वयं व्यवकल्यमानायाः परिमेयसङ्ख्यायाः योज्य-प्रतिलोमं अन्यपरिमेयसङ्ख्यया सह योजयामः।

   अनेन प्रकारेण, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{2}{3}$ इत्यस्याः योज्य-प्रतिलोमः $= \frac{7}{8} + \frac{-2}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}$ इति अस्ति।

10. द्वयोः परिमेयसङ्ख्ययोः गुणनार्थं वयम् एतयोः अंशान् हरान् च पृथक् – पृथक् गुणयामः पुनश्च गुणनफलम्

    अंशानां $\frac{\text{अंशानां गुणनफलम्}}{\text{हराणां गुणनफलम्}}$ इति रूपेण लिखामः।

11. एकां परिमेयसङ्ख्यां कयाचित् अन्यशून्येतरया परिमेयसङ्ख्यया विभक्तीकर्तुं वयं प्रथमां परिमेयसङ्ख्याम् अन्यपरिमेयसङ्ख्यायाः व्युत्क्रमेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times$ ($\frac{4}{3}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः) $\frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}$ इति अस्ति।